Aufgabe 11

ein Massenpunkt soll von $O(0,0)$ aus geworfen werden, es wirkt die g in Richtung $-\underline{e}_z$

$x(t)=v_{0,x}t=v_o\cos(\alpha)\,t$

$z(t)=v_{0,z}\,t-\frac{g}{2}\,t^2=v_0\sin(\alpha)\,t-\frac{g}{2}\,t^2$

zum Zeitpunkt t_1 soll das Teilchen in $P(x_1,z_1)$ ankommen, d.h.:

$x_1=v_0\cos(\alpha)\,t_1$

$z_1=v_0\sin(\alpha)\,t_1-\frac{g}{2}\,t_1^2$

$\Rightarrow z_1=\tan(\alpha)\,x_1-\frac{g}{2}\,\frac{x_1^2}{v_0^2\cos^2(\alpha)}$

$\Rightarrow v_0^2=\frac{g\,x_1^2}{2\cos(\alpha)\,(x_1\sin(\alpha)-z_1\cos(\alpha))}$

wenn $|v_0|$ ist genau dann minimal, wenn v_0^2 minimal

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}v_0^2=\frac{x_1^2(x_1\sin^2\alpha-2\,z_1\cos\alpha\sin\alpha-x_1\cos^2\alpha)\;g}{2\cos(\alpha)(x_1\sin\alpha-\;z_1\cos\alpha)}\overset{!}{=}0$

$\Rightarrow\tan(\alpha)=\frac{\sqrt{z_1^2+x_1^2}+z_1}{x_1}\;\Rightarrow\;\alpha=\arctan\left(\frac{\sqrt{z_1^2+x_1^2}+z_1}{x_1}\right)$

für $|v_0|$ gilt dann:

mit $\sin(\alpha)=\frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{\tan(\alpha)^2+1}}$, $\cos(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{\tan(\alpha)^2+1}}$

$v_0^2=\frac{g\,x_1^2}{2\,(x_1\sin(\alpha)\cos(\alpha)-z_1\cos^2(\alpha))}=\frac{g\,x_1^2}{2\cos^2(\alpha)\,(x_1\tan(\alpha)-z_1)}=\frac{g\,x_1^2\;(\tan^2(\alpha)+1)}{2\,(x_1\tan(\alpha)-z_1\,)}=$

$=\frac{g\,x_1^2\;(\frac{x_1^2+z_1^2+2z_1\sqrt{z_1^2+x_1^2}+z_1^2}{x_1^2}+1)}{2\,(x_1\frac{\sqrt{z_1^2+x_1^2}+z_1}{x_1}-z_1)}=\frac{g\,(2x_1^2+2z_1^2+2z_1\sqrt{z_1^2+x_1^2})}{2\,(\sqrt{z_1^2+x_1^2}+z_1-z_1)}=\frac{g\,(x_1^2+z_1^2+z_1\sqrt{z_1^2+x_1^2})}{\sqrt{z_1^2+x_1^2}}=g\,(\sqrt{z_1^2+x_1^2}+z_1)$

$\Rightarrow v_0=\sqrt{g\,(\sqrt{z_1^2+x_1^2}+z_1)}$

Geschwindigkeit im Zielpunkt: es muss Energieerhaltung gelten, deshalb:

$\frac{m}{2}v_0^2=\frac{m}{2}v_1^2+m\,g\,z_1$

$\Rightarrow v_1^2=v_0^2-2\,g\,z_1=g\,(\sqrt{z_1^2+x_1^2}+z_1)-2\,g\,z_1=g\,(\sqrt{z_1^2+x_1^2}-z_1)$

$\Rightarrow v_1=\sqrt{g\,(\sqrt{z_1^2+x_1^2}-z_1)}$

Die Richtung der Geschwindigkeit im Zielpunkt entspricht der Richtung der Bahnkurve dort:

$z(x)=\tan(\alpha)\,x-\frac{g}{2}\,\frac{x^2}{v_0^2\cos^2(\alpha)}=\tan(\alpha)\,x-\frac{1}{2}\,\frac{x^2\,(\tan^2(\alpha)+1)}{\tan(\alpha)\,x_1}$

$\frac{\mathrm{d}z(x)}{\mathrm{d}x}=\tan(\alpha)-x\frac{(\tan^2(\alpha)+1)}{\tan(\alpha)\,x_1}$

$\frac{\mathrm{d}z(x_1)}{\mathrm{d}x}=\tan(\alpha)-\frac{(\tan^2(\alpha)+1)}{\tan(\alpha)}=\frac{-1}{\tan(\alpha)}=\frac{-x_1}{\sqrt{x_1^2+z_1^2}+z_1}=\frac{-x_1(\sqrt{x_1^2+z_1^2}-z_1)}{x_1^2+z_1^2-z_1^2}=\frac{z_1-\sqrt{x_1^2+z_1^2}}{x_1}$

$$\Rightarrow \beta = \arctan(\frac{\mathrm{d}z(x_1)}{\mathrm{d}x}) = \arctan\left(\frac{z_1 - \sqrt{x_1^2 + z_1^2}}{x_1}\right)$$

	Geschwindigkeit	Winkel
Abwurf	$v_0 = \sqrt{g\,(\sqrt{z_1^2 + x_1^2} + z_1)}$	$\alpha = \arctan\left(\frac{\sqrt{z_1^2 + x_1^2} + z_1}{x_1}\right)$
Zielpunkt	$v_1 = \sqrt{g\,(\sqrt{z_1^2 + x_1^2} - z_1)}$	$\beta = \arctan\left(\frac{z_1 - \sqrt{x_1^2 + z_1^2}}{x_1}\right)$