Einführung in die Theoretische Physik

Blatt 12

Aufgabe 44

$G_\Delta(\vec{r}-\vec{r}\,')=\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$

a) $\vec{r}\neq\vec{r}\,'$:

$$\Delta G_\Delta(\vec{r}-\vec{r}\,')=\partial_x^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}+\partial_y^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}+\partial_z^2\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}=\partial_x\frac{-2x}{2|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}+\partial_y\frac{-2y}{2|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}+\partial_z\frac{-2z}{2|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}=$$

$$=-\left(\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3-\frac{3}{2}x|\vec{r}-\vec{r}\,'|2x}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^6}+\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3-\frac{3}{2}y|\vec{r}-\vec{r}\,'|2y}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^6}+\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3-\frac{3}{2}z|\vec{r}-\vec{r}\,'|2z}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^6}\right)=$$

$$=-\left(\frac{3|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2-3x^2-3y^2-3z^2}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^5}\right)=0$$

b) $$\int\limits_{\mathbb{R}^3}d^3\vec{r}\,\Delta G_\Delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\underset{\text{Gauß}}{=}\lim_{R\to\infty}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}d\theta\vec{n}\vec{\nabla}G_\Delta(\vec{r}-\vec{r}\,')R^2\cos\theta\underset{\text{oBdA: }\vec{r}\,'=\vec{0}}{=}$$

$$=\lim_{R\to\infty}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}d\theta\vec{n}\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}|}R^2\cos\theta$$

$$\vec{n}=\vec{e}_r=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=\frac{\vec{r}}{R}$$

$$\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}|}=\begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{-\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

$$\Rightarrow\int\limits_{\mathbb{R}^3}d^3\vec{r}\,\Delta G_\Delta(\vec{r}-\vec{r}\,')=\lim_{R\to\infty}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}d\theta\frac{\vec{r}}{R}\cdot\frac{-\vec{r}}{|\vec{r}|^3}R^2\cos\theta=\lim_{R\to\infty}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}d\theta\frac{-R^2}{R^4}R^2\cos\theta=$$

$$=-4\pi$$

Aufgabe 45

a) $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A},\ \vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0,\ \vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r})=\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{\nabla}\times(\varepsilon_{ijk}\partial_jA_k\vec{e}_i)=\varepsilon_{lim}\varepsilon_{ijk}\partial_l\partial_jA_k\vec{e}_m=-\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{ijk}\partial_l\partial_jA_k\vec{e}_m=$$

$$=-(\delta_{lj}\delta_{mk}-\delta_{lk}\delta_{mj})\partial_l\partial_jA_k\vec{e}_m=\partial_m\partial_lA_l\vec{e}_m-\partial_j\partial_jA_m\vec{e}_m=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})-\Delta\vec{A}=0-\Delta\vec{A}$$

$$\Rightarrow\Delta\vec{A}=-\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r})$$

b) $$\vec{j}(\vec{r})=\left\{\begin{array}{ll}\begin{pmatrix}0\\0\\j_0\end{pmatrix} & x^2+y^2=r^2\leq R^2\\ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} & x^2+y^2=r^2>R^2\end{array}\right\}=\begin{pmatrix}0\\0\\j_0\end{pmatrix}\Theta(R-|r|)$$

$$\Delta\vec{A}=-\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r})==-\frac{4\pi}{c}\begin{pmatrix}0\\0\\j_0\end{pmatrix}\Theta(R-|r|)$$

$$\Delta\vec{A}=(\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2)\vec{A}\underset{\text{koordinaten}}{\overset{\text{in Zylinder-}}{=}}\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_rA)+\frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2\vec{A}+\partial_z^2\vec{A}=\frac{1}{r}\partial_r\vec{A}+\partial_r^2\vec{A}+\frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2\vec{A}+\partial_z^2\vec{A}$$

$\vec{j}$ unabhängig von φ und $z\Rightarrow\ \vec{A}$ unabhängig von φ und z

$$\Rightarrow \Delta\vec{A} = \frac{1}{r}\partial_r\vec{A} + \partial_r^2\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j_0 \end{pmatrix}\Theta(R - |r|)$$

weiter ???, muss ich mir noch überlegen

Aufgabe 46

$$I = \int_{x_1}^{x_2} d\,x\, y(x)\sqrt{1+y'^2}$$

ELG: $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{d\,x}\frac{\partial f}{\partial y'} = \sqrt{1+y'^2} - \frac{d}{d\,x}\frac{y\,y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \sqrt{1+y'^2} + \frac{-(y'^2 + y\,y'')\sqrt{1+y'^2} + y\,y'\frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}}}{\sqrt{1+y'^2}^3} =$

$$= \frac{(1+y'^2)^2 - (1+y'^2)(y'^2 + y\,y'') + y\,y'^2y''}{(1+y'^2)^2} = \frac{1 + 2y'^2 + y'^4 - y'^2 - y\,y'' - y'^4 - y\,y'^2y'' + y\,y'^2y''}{(1+y'^2)^2} =$$

$$= \frac{1 + y'^2 - y\,y''}{(1+y'^2)^2} \overset{!}{=} 0$$

$$1 + y'^2 - y\,y'' = 0$$

aus Vorlesung bekannt: $y = \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}\cosh(\frac{D\sqrt{1+y'^2}}{2y}) = E\,\cosh(\frac{D}{2E})$ bildet Lösung (ob man das irgendwie aus dieser DGL bekommt weiß ich nicht, ansonsten halt so wie in der Vorlesung über die Erhaltung E)

Aufgabe 47

$$S = \int_{t_0}^{t_1} d\,t\, L(\rho(t), \varphi(t), z(t)) \quad L(\rho(t), \varphi(t), z(t)) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} - V(\rho, \varphi, z)$$

a) $\dot{\vec{r}} = \partial_t\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{z} \end{pmatrix}$

$\dot{\vec{r}}^{\,2} = (\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 + (\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$