Einführung in die Theoretische Physik

Blatt 11

Aufgabe 40

Aufgabe 41

Zylinderkoordinaten: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$

$d\,s = \sqrt{(r\,d\varphi)^2 + (d\,z)^2} = \sqrt{r^2 + (\frac{d\,z}{d\varphi})^2}d\varphi$

$\Rightarrow S = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \mathrm{ds} = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + (\frac{d\,z}{d\varphi})^2}d\varphi$

ELG $\frac{\partial\sqrt{r^2+(\frac{d\,z}{d\varphi})^2}}{\partial z} - \frac{d}{d\varphi}\frac{\partial\sqrt{r^2+(\frac{d\,z}{d\varphi})^2}}{\partial(\frac{d\,z}{d\varphi})} = 0 - \frac{d}{d\varphi}\frac{2\frac{d\,z}{d\varphi}}{2\sqrt{r^2+(\frac{d\,z}{d\varphi})^2}} = -\frac{d}{d\varphi}\frac{1}{\sqrt{(\frac{r}{\frac{d\,z}{d\varphi}})^2+1}} = \frac{1}{2\sqrt{(\frac{r}{\frac{d\,z}{d\varphi}})^2+1}^3}\,\frac{-2r^2}{(\frac{d\,z}{d\varphi})^3}\,\frac{d^2z}{d\varphi^2} \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \frac{d^2z}{d\varphi^2} = 0$

entspricht gerader Verbingung auf abgewickeltem Zylinder

da $\vec{r}(\varphi) = \vec{r}(\varphi + n\,2\pi)$ ergeben sich unendlich viele Verbindungen, wobei die Verbindung mit minimalem $\Delta\varphi$ (also entweder $\varphi_1 \to \varphi_2$ oder $\varphi_1 \to \varphi_2 - 2\pi$ wenn $0 \leq \varphi_1, \varphi_2 < 2\pi$) die gesuchte kürzeste Verbindung ist, alle andere Lösungen sind Terassenpunkte des Funktionals

Aufgabe 42

a) Minimierung der Wirkung:

$S = \int\limits_0^{t_2} (\frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{D}{2}x^2)d\,t$

ELG: $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{d\,t}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = -D\,x - m\ddot{x} = 0$

harmonischer Oszillator

Lösungsansatz: $x(t) = A\,e^{i\omega t}$

$\frac{D}{m}A\,e^{i\omega t} - \omega^2 A\,e^{i\omega t} = 0$

$\Rightarrow \omega = \pm\sqrt{\frac{D}{m}}$

$\Rightarrow x(t) = A_1 e^{i\sqrt{\frac{D}{m}}t} + A_2 e^{-i\sqrt{\frac{D}{m}}t}$

b) Erhaltung: $E = f - \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\dot{x} = (\frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{D}{2}x^2) - m\dot{x}^2 = -(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}D\,m^2) = -(E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{pot}})$

Aufgabe 43

$S = \int d\,r\,f(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$

$f(\vec{r}\,,\dot{\vec{r}}\,) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{a}{2}(x^2 + y^2) + m\,g\,z$

a) ELGs:

$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{d\,t}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 0$	$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{d\,t}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0$	$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{d\,t}\frac{\partial f}{\partial \dot{z}} = 0$
$-a\,x - m\ddot{x} = 0$	$-a\,y - m\ddot{y} = 0$	$-m\,g - m\ddot{x} = 0$
harm. Schw. mit $\omega = \sqrt{\frac{a}{m}}$	harm. Schw. mit $\omega = \sqrt{\frac{b}{m}}$	konst. beschleunigte Bew.

b) $D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\vec{r}\,' = D\,\vec{r} = \begin{pmatrix} x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ -x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z \end{pmatrix}$

$\dot{\vec{r}}\,' = \begin{pmatrix} \partial_t(x\cos\varphi + y\sin\varphi) \\ \partial_t(-x\sin\varphi + y\cos\varphi) \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}\cos\varphi + \dot{y}\sin\varphi \\ -\dot{x}\sin\varphi + \dot{y}\cos\varphi \\ \dot{z} \end{pmatrix}$

$f(\vec{r}\,', \dot{\vec{r}}\,') = \frac{m}{2}((\dot{x}\cos\varphi + \dot{y}\sin\varphi)^2 + (-\dot{x}\sin\varphi + \dot{y}\cos\varphi)^2 + \dot{z}^2) -$

$-\frac{a}{2}((x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2 + (-x\sin\varphi + y\cos\varphi)^2) + m\,g\,z =$

$= \frac{m}{2}(\dot{x}^2\cos^2\varphi + \dot{y}^2\sin^2\varphi + 2\dot{x}\dot{y}\cos\varphi\sin\varphi + \dot{x}^2\sin^2\varphi + \dot{y}^2\cos^2\varphi - 2\dot{x}\dot{y}\cos\varphi\sin\varphi + \dot{z}^2) -$

$-\frac{a}{2}(x^2\cos^2\varphi + y^2\sin^2\varphi + 2\,x\,y\cos\varphi\sin\varphi + x^2\sin^2\varphi + y^2\cos^2\varphi - 2\,x\,y\cos\varphi\sin\varphi) + m\,g\,z =$

$= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{a}{2}(x^2 + y^2) + m\,g\,z = f(\vec{r}\,', \dot{\vec{r}}\,')$

$\Rightarrow$ invariant

c) $I = \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\frac{\partial x'}{\partial \varphi}|_{\varphi=0} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial y'}{\partial \varphi}|_{\varphi=0} = m\dot{x}(-x\sin\varphi + y\cos\varphi)|_{\varphi=0} + m\dot{y}(-x\cos\varphi - y\sin\varphi)|_{\varphi=0} =$

$= m\dot{x}y - m\dot{y}x$

$\frac{d\,I}{d\,t} = m\ddot{x}y + m\,\dot{x}\dot{y} - m\ddot{y}x - m\,\dot{x}\dot{y} = m\ddot{x}y - m\ddot{y}x \overset{\text{da ELG}}{\underset{\text{erfüllt}}{=}} -a\,x\,y + a\,y\,x = 0$